

Die Brownsche Bewegung als Markovprozess

Seminar Angewandte Stochastik

Alexander Greif

Fernuniversität Hagen

17. Januar 2026

Agenda

- 1 Brownsche Bewegung
- 2 Elementare ME
- 3 Schwache ME
- 4 Blumenthal 0-1
- 5 Starke ME
- 6 Reflexionsprinzip

Die Brownsche Bewegung

Definition 1 (Brownsche Bewegung)

Ein reellwertiger stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ heißt Brownsche Bewegung, wenn gilt:

1. *Deterministischer Startpunkt:* $B_0 = x$ fast sicher.
2. *Unabhängige Inkremente:* Für gegebene Zeitpunkte $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ sind die Inkremente $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig.
3. *Stationäre und normalverteilte Inkremente:* Für alle $t, h \geq 0$ ist $B_{t+h} - B_t$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h .
4. *Stetige Pfade:* Die Abbildung $t \mapsto B_t$ ist fast sicher stetig.

Beispielpfade

Brownsche Bewegung



Elementare ME



Schwache ME



Blumenthal 0-1



Starke ME



Reflexionsprinzip



Simulationen einer Brownschen Bewegung

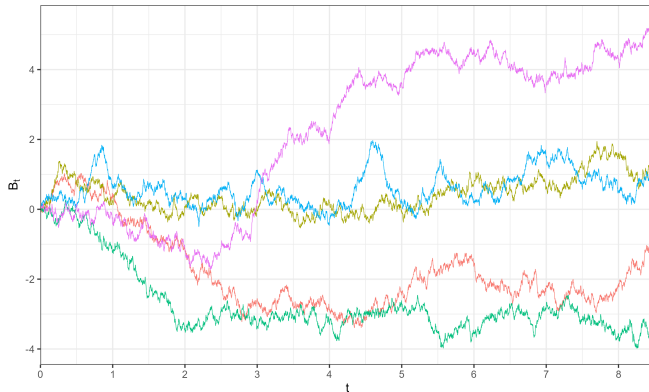


Abbildung 1: Simulation von fünf Pfaden einer Standard Brownschen Bewegung.

Die Elementare Markoveigenschaft

Definition für allgemeine stochastische Prozesse

Brownsche Bewegung
uuu

Elementare ME
uuuu

Schwache ME
uuuuuu

Blumenthal 0-1
uuuuu

Starke ME
uuuuuuu

Reflexionsprinzip
uuuuu

Definition 2 (Elementare Markoveigenschaft)

Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit total geordneter Indexmenge T besitzt die **elementare Markoveigenschaft**, wenn für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s) \quad \text{fast sicher.}$$

Dabei bezeichnet

$$\mathcal{F}_s := \sigma(X_t : 0 \leq t \leq s)$$

die **σ -Algebra der Vergangenheit**.

Wir nennen einen Prozess mit elementarer Markoveigenschaft auch **gedächtnislos**.

Elementare Markoveigenschaft der BB

Brownsche Bewegung

uuu

Elementare ME

uuuu

Schwache ME

uuuuuu

Blumenthal 0-1

uuuuu

Starke ME

uuuuuuuu

Reflexionsprinzip

uuuuu

Theorem 3 (Elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in $x \in \mathbb{R}$. Für alle $s \geq 0$ gilt dann

$$\sigma((B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}) \perp \mathcal{F}_s = \sigma(B_t : 0 \leq t \leq s)$$

.

Bemerkung

Elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung besagt also, dass die zukünftigen Inkremente unabhängig von der Vergangenheit sind. Diese Aussage ist **echt stärker** als die der elementaren Markoveigenschaft für allgemeine stochastische Prozesse.

Beweisidee

Brownsche Bewegung
○○○

Elementare ME
○○○●○

Schwache ME
○○○○○

Blumenthal 0-1
○○○○○

Starke ME
○○○○○○○

Reflexionsprinzip
○○○○○

- ▶ Es genügt, die Unabhängigkeit für endliche Teilfamilien der Erzeuger der σ -Algebren zu zeigen.
- ▶ Jede solche Teilfamilie der Erzeuger der Vergangenheit lässt sich durch endliche disjunkte Inkremente der Vergangenheit darstellen:

$$(B_{u_1}, \dots, B_{u_n}) = \left(x + \sum_{i=1}^k (B_{u_i} - B_{u_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, n}, u_0 := 0$$

- ▶ Ebenso lässt sich jede endliche Teilfamilie der Inkremente zu B_s durch endliche disjunkte Inkremente der Zukunft darstellen:

$$(B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s) = \left(\sum_{i=1}^k (B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, m}, t_0 = s$$

$$(B_{u_1}, \dots, B_{u_n}) = \left(x + \sum_{i=1}^k (B_{u_i} - B_{u_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, n}$$

$$(B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s) = \left(\sum_{i=1}^k (B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, m}$$

- ▶ Alle diese Inkremente sind offenbar disjunkt, also nach der Definition der unabhängigen Inkremente der Brownschen Bewegung unabhängig.
- ▶ Da die Abbildungen von den Inkrementen zu den Teilfamilien der Erzeuger messbar sind, bleibt die Unabhängigkeit erhalten.

Die Schwache Markoveigenschaft

Die Idee

Brownsche Bewegung



Elementare ME



Schwache ME



Blumenthal 0-1



Starke ME



Reflexionsprinzip



- Die schwache Markoveigenschaft erweitert die elementare Markoveigenschaft um die Forderung nach Zeithomogenität.

Definition für allgemeine stochastische Prozesse

Brownsche Bewegung
○○○

Elementare ME
○○○○

Schwache ME
○○●○○

Blumenthal 0-1
○○○○○

Starke ME
○○○○○○○

Reflexionsprinzip
○○○○○

Die schwache Markoveigenschaft erweitert die elementare Markoveigenschaft um die Forderung nach Zeithomogenität.

Definition 4 (Schwache Markoveigenschaft)

Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subseteq [0, \infty)$ besitzt die schwache Markoveigenschaft, wenn für alle $s, t \geq 0$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in A) \quad \text{fast sicher.}$$

Dabei bezeichnet P^x die Verteilung des Prozesses mit deterministischem Startwert x , also $P^x(E) := P(E \mid X_0 = x)$ für jedes Ereignis E .

Schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung

Brownsche Bewegung

UUU

Elementare ME

UUUUU

Schwache ME

UUU●UU

Blumenthal 0-1

UUUUU

Starke ME

UUUUUUU

Reflexionsprinzip

UUUUU

Theorem 5 (Schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Für alle $s \geq 0$ ist $(B_t^{\Delta(s)})_{t \geq 0} := (B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}$ eine von $\mathcal{F}_s$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung.

Die Unabhängigkeit ist genau die elementare Markoveigenschaft. Wir zeigen, dass $(B_t^{\Delta(s)})_{t \geq 0}$ die Axiome der Brownschen Bewegung erfüllt.

1. Deterministischer Startpunkt: Offensichtlich gilt $B_0^{\Delta(s)} = B_s - B_s = 0$.
2. Unabhängige Inkremente: Wir können jedes Inkrement von $B^{\Delta(s)}$ schreiben als Inkrement von B :

$$B_{t+h}^{\Delta(s)} - B_t^{\Delta(s)} = (B_{s+t+h} - B_s) - (B_{s+t} - B_s) = B_{s+t+h} - B_{s+t}$$

Da B eine Brownsche Bewegung ist, sind die Inkremente unabhängig.

3. Stationäre und normalverteilte Inkremente: Auch dies folgt direkt aus der Darstellung der Inkremente als Inkremente von B .
4. Stetige Pfade: Die Stetigkeit von $t \mapsto B_t^{\Delta(s)} = B_{s+t} - B_s$ folgt direkt aus der Stetigkeit von $t \mapsto B_t$.

Illustratives Beispiel: Driftprozesse



Elementare ME



Schwache ME



Starke ME



Simulationen einer Brownschen Bewegung mit zeitabhängigem Drift

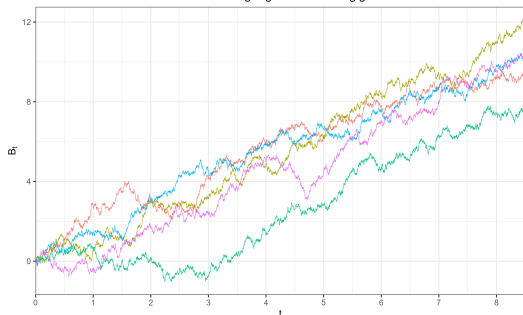


Abbildung 2: $X_t = B_t + \int_0^t b(s) ds$, $b(s) := s$. Elementar aber nicht schwach markovsch.

Simulationen einer Brownschen Bewegung mit ortsabhängigem Drift

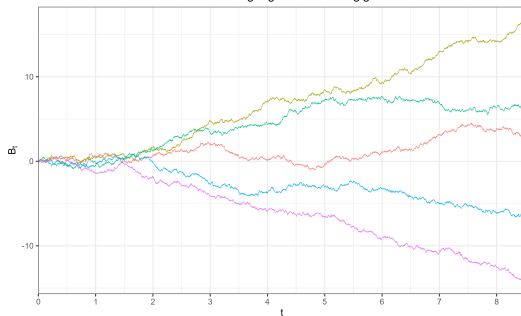


Abbildung 3: $X_t = B_t + \int_0^t b(X_s) ds$, $b(x) := 0.2x$. Schwach markovsch aber erfüllt nicht die elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung.

Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz

Die Keim- σ -Algebra $\mathcal{F}_0^+$

Brownsche Bewegung
UUU

Elementare ME
UUUUU

Schwache ME
UUUUUU

Blumenthal 0-1
UUUUU

Starke ME
UUUUUUU

Reflexionsprinzip
UUUUU

- ▶ Die **augmentierte σ -Algebra der Vergangenheit** $\mathcal{F}_t^+$ erweitert die σ -Algebra der Vergangenheit $\mathcal{F}_t$ um einen infinitesimalen Blick in die Zukunft:

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$$

- ▶ Die **Keim- σ -Algebra** $\mathcal{F}_0^+$ enthält genau die Ereignisse, die in einem beliebig kleinen Intervall nach dem Start des Prozesses stattfinden.
- ▶ Beispiele für Keim-Ereignisse:
 - ▶ Der Prozess nimmt in einer Umgebung des Prozessesstarts nur Werte an, die mindestens so groß (oder klein) sind wie sein Startwert.
 - ▶ Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts unendlich oft seinen Startwert an.
 - ▶ Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts einen bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$ an.

Verschärfung der elementaren ME der BB

Brownsche Bewegung
UUU

Elementare ME
UUUUU

Schwache ME
UUUUUU

Blumenthal 0-1
UUUUU

Starke ME
UUUUUUU

Reflexionsprinzip
UUUUU

Wir können die elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung verschärfen, indem wir die Unabhängigkeit von $\mathcal{F}_s$ auf $\mathcal{F}_s^+$ ausdehnen:

Lemma 6

Für alle $s \geq 0$ gilt $(B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0} \perp \mathcal{F}_s^+$.

Beweisidee:

- ▶ Wir können jede endlich Teilfamilie $(B_{s+t} - B_s)_{t \in T}$ von oben approximieren durch $(B_{s_n+t} - B_{s_n})_{t \in T}$ für eine Folge (s_n) mit $s_n \downarrow s$.
- ▶ Mit der elementaren Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung gilt $(B_{s_n+t} - B_{s_n})_{t \in T} \perp \mathcal{F}_{s_n} \supset \mathcal{F}_s^+$.
- ▶ Unabhängigkeit bleibt unter fast sicheren Grenzwerten erhalten.

Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz

Brownsche Bewegung

○○○

Elementare ME

○○○○○

Schwache ME

○○○○○○

Blumenthal 0-1

○○○○●

Starke ME

○○○○○○○

Reflexionsprinzip

○○○○○

Theorem 7 (Blumenthalsches 0-1-Gesetz)

Alle Ereignisse in $\mathcal{F}_0^+$ sind trivial.

Beweis.

Laut Lemma 6 ist ganz $(B_t)_{t \geq 0}$ unabhängig von $\mathcal{F}_0^+$. Insbesondere gilt das also für alle Ereignisse in $\mathcal{F}_0^+$. Sie sind also unabhängig von sich selbst und folglich trivial. □

Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz

Brownsche Bewegung

UUU

Elementare ME

UUUUU

Schwache ME

UUUUUU

Blumenthal 0-1

UUUUU

Starke ME

UUUUUUUU

Reflexionsprinzip

UUUUU

Abschließend können wir den zu Beginn beispielhaft genannten Keim-Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuweisen.

- ▶ *Der Prozess nimmt in einer Umgebung des Prozessesstarts nur Werte an, die mindestens so groß (oder klein) sind wie sein Startwert.* Dieses Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0.
- ▶ *Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts unendlich oft seinen Startwert an.* Da die Pfade der Brownschen Bewegung stetig sind und Ereignis (1) Wahrscheinlichkeit 0 hat, hat dieses Ereignis offensichtlich Wahrscheinlichkeit 1.
- ▶ *Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts einen bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$ an.* Für $a = B_0$ beträgt die Wahrscheinlichkeit 1, für $a \neq B_0$ beträgt sie 0.

Die starke Markoveigenschaft

- ▶ Die starke Markoveigenschaft verallgemeinert von den deterministischen Zeitpunkten der schwachen Markoveigenschaft auf eine bestimmte Klasse zufälliger Zeitpunkte, genannt Stoppzeiten.
- ▶ Eine **Stoppzeit** ist wie folgt charakterisiert: Betrachtet man einen Pfad bis zu einem bestimmten Zeitpunkt, erkennt man, ob die Stoppzeit bereits erreicht wurde.

Definition 8 (Stoppzeit)

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Stoppzeit* bezüglich $(\mathcal{F}_t)$, wenn für alle $t \geq 0$ gilt

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Erste Treffzeit und diskrete Approximation

Brownsche Bewegung
UUU

Elementare ME
UUUUU

Schwache ME
UUUUUU

Blumenthal 0-1
UUUUU

Starke ME
UUUUUUU

Reflexionsprinzip
UUUUU

- ▶ Der früheste Zeitpunkt, zu dem der Prozess einen Wert aus einer gegebenen Menge annimmt, genannt **erste Treffzeit** ist eine Stoppzeit.
- ▶ Wir können jede Stoppzeit τ diskret von oben oder unten approximieren durch

$$\tau_n^+ := \min_{k \in \mathbb{N}_0} \{k/2^n : k/2^n \geq \tau\}$$

beziehungsweise

$$\tau_n^- := \max_{k \in \mathbb{N}_0} \{k/2^n : k/2^n \leq \tau\} .$$

- ▶ τ_n^+ ist eine Stoppzeit, τ_n^- ist keine.

Erste Treffzeit und diskrete Approximation

Brownsche Bewegung



Elementare ME



Schwache ME



Blumenthal 0-1



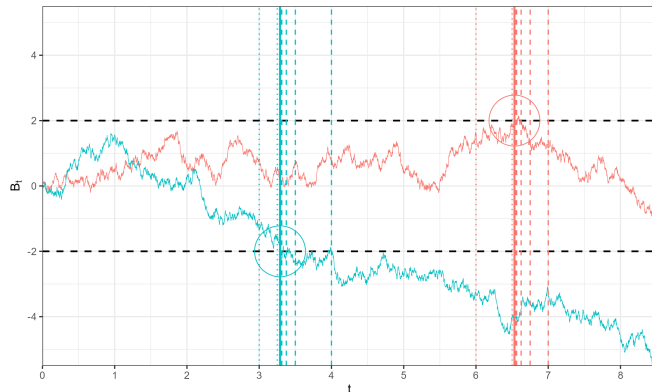
Starke ME



Reflexionsprinzip



Erste Treffzeit von $\{-2, 2\}$ und ihre diskreten Approximationen



$$\tau := \min\{t \geq 0 : B_t \in \{-2, 2\}\}$$

$$\tau_n^+ := \min\left\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N}_0, \frac{k}{2^n} \geq \tau\right\}$$

$$\tau_n^- := \max\left\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N}_0, \frac{k}{2^n} \leq \tau\right\}$$

Starke Markoveigenschaft

Brownsche Bewegung
○○○

Elementare ME
○○○○○

Schwache ME
○○○○○○

Blumenthal 0-1
○○○○○

Starke ME
○○○○●○○

Reflexionsprinzip
○○○○○

Definition 9 (Starke Markoveigenschaft)

Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subseteq [0, \infty)$ besitzt die starke Markoveigenschaft, wenn für alle $t \geq 0$, alle Stoppzeiten τ bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_{\tau+t} \in A \mid \mathcal{F}_\tau) = P^{X_\tau}(X_t \in A) \quad \text{fast sicher.}$$

Dabei bezeichnet

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

die von τ induzierte σ -Algebra.

Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung

Brownsche Bewegung

UUU

Elementare ME

UUUU

Schwache ME

UUUUUU

Blumenthal 0-1

UUUUU

Starke ME

UUUUUU

Reflexionsprinzip

UUUUU

Theorem 10 (Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Für alle Stoppzeiten τ bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ ist $(B_t^{\Delta(\tau)})_{t \geq 0} := (B_{\tau+t} - B_\tau)_{t \geq 0}$ eine von $\mathcal{F}_\tau$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung.

Beweisidee:

Wir gehen, ausgehend von der schwachen Markoveigenschaft, von deterministischen Zeitpunkten zur diskreten Approximation von oben τ_n^+ und schließlich über Grenzwertbildung zur allgemeinen Stoppzeit τ . Im ersten Schritt nutzen wir aus, dass τ_n^+ nur abzählbar viele Werte annimmt.

Entscheidender Schritt des Beweises

Brownsche Bewegung

uuu

Elementare ME

uuuuu

Schwache ME

uuuuuu

Blumenthal 0-1

uuuuu

Starke ME

uuuuuuu

Reflexionsprinzip

uuuuu

Sei $E \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$. Dann gilt:

$$P(B^{\Delta(\tau_n)} \in A, E)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(B^{\Delta(k/2^n)} \in A, \tau_n = k/2^n, E) \quad \left| \begin{array}{l} \tau_n(\Omega) \subseteq \{k/2^n : k \in \mathbb{N}_0\} \\ \text{ist abzählbar} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(B^{\Delta(k/2^n)} \in A) \cdot P(\tau_n = k/2^n, E) \quad \left| \begin{array}{l} B^{\Delta(k/2^n)} \perp \mathcal{F}_{k/2^n} \text{ und} \\ (\tau_n = k/2^n \cap E) \in \mathcal{F}_{k/2^n} \end{array} \right.$$

$$= P(B \in A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau_n = k/2^n, E) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Inkremente von } B \\ \text{sind stationär} \end{array} \right.$$

$$= P(B \in A) \cdot P(E)$$

Das Reflexionsprinzip

Das Reflexionsprinzip

Brownsche Bewegung

UUU

Elementare ME

UUUUU

Schwache ME

UUUUUU

Blumenthal 0-1

UUUUU

Starke ME

UUUUUUU

Reflexionsprinzip

UUUUU

Theorem 11 (Reflexionsprinzip)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}$ und τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration. Dann ist der durch

$$B_t^* := B_t 1_{\{t \leq \tau\}} + (2B_\tau - B_t) 1_{\{t > \tau\}}$$

definierte Prozess $(B_t^*)_{t \geq 0}$ wieder eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt x .

Anschaulich handelt es sich bei (B_t^*) um den in τ gespiegelten Prozess (B_t) .

Reflexionsprinzip

Brownsche Bewegung

○○○

Elementare ME

○○○○○

Schwache ME

○○○○○

Blumenthal 0-1

○○○○○

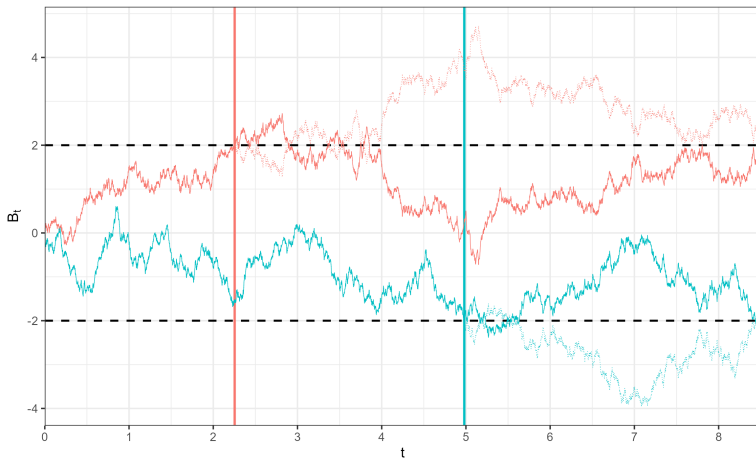
Starke ME

○○○○○○○

Reflexionsprinzip

○○●○○

Pfadreflexion in der ersten Treffzeit von $\{-2, 2\}$



Wir können (B_t) und (B_t^*) schreiben als

$$B_t = B_t 1_{\{t \leq \tau\}} + (B_\tau + (B_t - B_\tau)) 1_{\{t > \tau\}}$$

und

$$B_t^* = B_t 1_{\{t \leq \tau\}} + (B_\tau - (B_t - B_\tau)) 1_{\{t > \tau\}} .$$

Dann folgt das Reflexionsprinzip aus der starken Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung, der Symmetrie der Standard Brownschen Bewegung und der Erhaltung von Unabhängigkeit unter messbaren Abbildungen.

Anwendungen des Reflexionsprinzips

Brownsche Bewegung

UUU

Elementare ME

UUUUU

Schwache ME

UUUUUU

Blumenthal 0-1

UUUUU

Starke ME

UUUUUUU

Reflexionsprinzip

UUUUU

- ▶ Bestimmung der Verteilung des Maximums auf einem Zeitintervall.
- ▶ Bestimmung der Verteilung von Treffzeiten.
- ▶ strukturelle Untersuchung der mehrdimensionalen Brownschen Bewegung.