



FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Seminar Angewandte Stochastik
Wintersemester 2025/26

Topic 8
Die Brownsche Bewegung als Markovprozess

von
Alexander Greif
Matrikelnummer: 4214242

Datum der Abgabe: 11.01.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Brownsche Bewegung	3
2.1	Brownsche Bewegung	3
3	Elementare und schwache Markoveigenschaft	5
3.1	Elementare Markoveigenschaft	6
3.2	Schwache Markoveigenschaft	8
3.3	Beispiele	10
3.4	Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz	12
4	Starke Markoveigenschaft	15
4.1	Stoppzeiten	15
4.2	Starke Markoveigenschaft	18
4.3	Reflexionsprinzip	19

Literaturverzeichnis

1 Einleitung

Die Brownsche Bewegung ist ein fundamentaler stochastischer Prozess, der zufällige, stetige Bewegungen modelliert und in vielen Bereichen der Mathematik, Physik und Finanzmathematik als zentrales Modell dient. Sie zeichnet sich durch unabhängige, stationäre Inkremente und stetige Pfade aus und bildet die Grundlage vieler weiterführender Konzepte der Stochastik.

Ein wesentliches Strukturmerkmal der Brownschen Bewegung ist ihre Markoveigenschaft. Anschaulich bedeutet diese, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses ab einem gewissen Zeitpunkt durch den Zustand des Prozesses zu ebendiesem Zeitpunkt bereits vollständig bestimmt ist. Die Vergangenheit liefert also über die Gegenwart hinaus keine für die Zukunft relevanten Informationen. Wir sagen der Prozess ist *gedächtnislos*.

In dieser Arbeit betrachten wir die Brownsche Bewegung aus dem Blickwinkel verschiedener Markoveigenschaften. Zunächst führen wir die elementare Markoveigenschaft - das ist genau die erwähnte Gedächtnislosigkeit - ein und zeigen, dass die Brownsche Bewegung diese erfüllt. Darauf aufbauend behandeln wir die schwache Markoveigenschaft, welche zusätzlich Zeithomogenität fordert. Aus ihr folgt das Blumenthalsche 0-1-Gesetz, welches weitere Einblicke in die Struktur der Brownschen Bewegung gewährt. Anschließend erweitern wir den Begriff der Markoveigenschaft auf zufällige Zeitpunkte und führen mithilfe von Stoppzeiten die starke Markoveigenschaft ein. Den Abschluss bildet das Reflexionsprinzip als anschauliche und in vielen Anwendungen zentrale Folgerung der starken Markoveigenschaft. Als Grundlage dieser Arbeit dient das Buch *Brownian Motion* von Mörters und Peres [1].

2 Die Brownsche Bewegung

2.1 Brownsche Bewegung

Eine Brownsche Bewegung ist ein reellwertiger stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$. Die Eigenschaften, die die Brownsche Bewegung ausmachen, lassen sich durch vier Axiome charakterisieren.

Definition 2.1.1 (Brownsche Bewegung). Einen reellwertigen stochastischen Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ mit den Eigenschaften

1. *Deterministischer Startpunkt*: $B_0 = x$ fast sicher,
2. *Unabhängige Inkremente*: Für gegebene Zeitpunkte $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ sind die Inkremente $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig.
3. *Stationäre und normalverteilte Inkremente*: Für alle $t, h \geq 0$ ist $B_{t+h} - B_t$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h .
4. *Stetige Pfade*: Die Abbildung $t \mapsto B_t$ ist fast sicher stetig.

nennen wir eine **Brownsche Bewegung** mit Start in x . Das Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x ist, bezeichnen wir mit P^x . Eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 heißt **Standard Brownsche Bewegung**.

Abbildung 2.1 zeigt fünf Pfade einer Standard Brownschen Bewegung. Der deterministische Startpunkt und die Stetigkeit der Pfade sind gut erkennbar.

2 Die Brownsche Bewegung

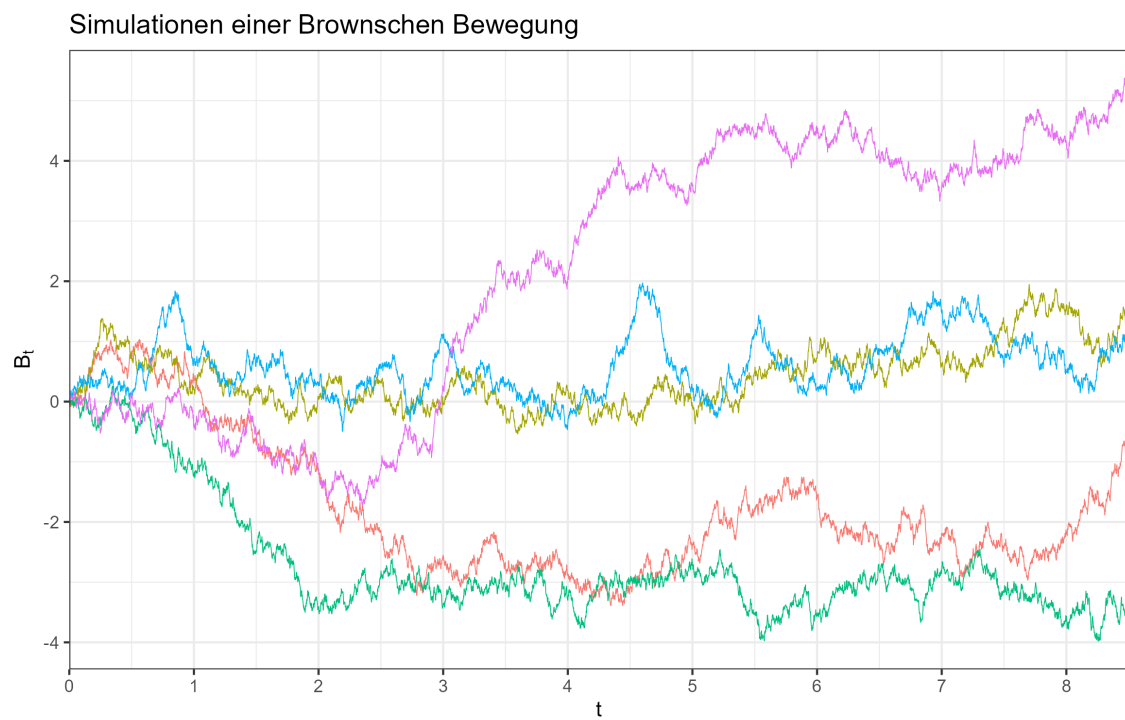


Abbildung 2.1: Simulation von fünf Pfaden einer Standard Brownschen Bewegung.

3 Elementare und schwache Markoveigenschaft

Die elementare und die schwache Markoveigenschaft treffen Aussagen darüber, wie sich ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit total geordneter Zeitmenge T ab einem festen Zeitpunkt $s \in T$ verhält. Sie betrachten also den Prozess $(X_t)_{t \geq s}$, die “Zukunft” des Prozesses ab der Zeit s . Genauer beschreiben sie, inwiefern die Verteilung der Zukunft $(X_t)_{t \geq s}$ durch die “Vergangenheit” $(X_t)_{t \leq s}$ und die “Gegenwart” X_s beeinflusst wird.

Die elementare Markoveigenschaft besagt, dass bei gegebener Gegenwart die Vergangenheit keine zusätzlichen, für die Verteilung der Zukunft relevanten Informationen enthält. Die schwache Markoveigenschaft geht darüber hinaus und fordert, dass die Zukunft $(X_t)_{t \geq s}$ dieselbe Verteilung besitzt wie der ursprüngliche Prozess, wenn dieser im Zustand X_s gestartet wird, also im Falle eines reellwertigen Prozesses um $X_s - X_0$ verschoben ist.

Im Folgenden werden wir beide Eigenschaften formal definieren und zeigen, dass die Brownsche Bewegung sogar eine strengere Eigenschaft erfüllt: Der Prozess der relativen Zukunft

$$(B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0},$$

also der Prozess der Inkremente ab der Zeit s , ist eine von der Vergangenheit $(B_t)_{t \leq s}$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$(B_t)_{t \geq s} = (B_{s+t})_{t \geq 0} = (B_s + (B_{s+t} - B_s))_{t \geq 0}$$

eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt B_s ist, also die Verteilung P^{B_s} besitzt. Insbesondere ist die Zukunft bis auf die durch die Gegenwart B_s festgelegte Translation unabhängig von der Vergangenheit. Die Vergangenheit liefert somit, gegeben die Gegenwart, keine weiteren für die Verteilung

der Zukunft relevanten Informationen. Damit gelten für die Brownsche Bewegung sowohl die elementare als auch die schwache Markoveigenschaft. Aufgrund dieser Implikation werden wir im Folgenden die Unabhängigkeit der relativen Zukunft $(B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}$ von der Vergangenheit $(B_t)_{t \leq s}$ als *elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung* bezeichnen. Die Kombination dieser mit der Tatsache, dass diese relative Zukunft eine Standard-Brownsche Bewegung ist, bezeichnen wir als *schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung*.

In den folgenden Abschnitten definieren wir die elementare und die schwache Markoveigenschaft formal für allgemeine stochastische Prozesse. Außerdem werden wir die elementare und die schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung formulieren und zeigen, dass die Brownsche Bewegung diese erfüllt. Auf einen formalen Beweis, dass diese Formulierungen die allgemeinen Formulierungen der Markoveigenschaften implizieren, werden wir verzichten. Abschließend zeigen wir mit dem Blumenthalschen 0-1-Gesetz eine wichtige Anwendung der schwachen Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung.

3.1 Elementare Markoveigenschaft

Um die elementare Markoveigenschaft formal definieren zu können, definieren wir zunächst die “ σ -Algebra der Vergangenheit” für einen reellwertigen stochastischen Prozess $(X_s)_{s \in T}$:

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$

Intuitiv beinhaltet diese σ -Algebra alle Informationen über den Prozess bis zum Zeitpunkt t . Nun können wir die elementare Markoveigenschaft formal definieren.

Definition 3.1.1 (Elementare Markoveigenschaft). Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit total geordneter Indexmenge T besitzt die elementare Markoveigenschaft, wenn für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s) \quad \text{fast sicher.}$$

Dies ist genau die formale Formulierung unserer Aussage, dass die elementare Markoveigenschaft besagt, dass Kenntnis über die gesamte Vergangenheit des Prozesses nicht mehr Informationen über die Zukunft liefert als die Kenntnis der Gegenwart allein. Wir nennen einen Prozess auch *gedächtnislos*, wenn er die elementare Markoveigenschaft erfüllt. Bevor wir die elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung, also die Unabhängigkeit der relativen Zukunft von der Vergangenheit, zeigen können, brauchen wir noch ein kleines Zwischenresultat. Dieses erlaubt uns, Aussagen über endliche Teilmengen des Prozesses auf den gesamten Prozess zu übertragen.

Satz 3.1.1. *Seien $(X_i)_{i \in I}$ und $(Y_j)_{j \in J}$ Familien von reellwertigen Zufallsvariablen. Es gilt*

$$\sigma((X_i)_{i \in I}) \perp \sigma((Y_j)_{j \in J})$$

genau dann, wenn

$$(X_i)_{i \in I'} \perp (Y_j)_{j \in J'} \text{ für alle endlichen } I' \subseteq I \text{ und } J' \subseteq J.$$

In Worten: Die σ -Algebren sind unabhängig genau dann, wenn alle endlichen Teilfamilien ihrer Erzeuger unabhängig sind.

Anstelle eines ausführlichen Beweises geben wir eine kurze Skizze:

- Die endlichen Teilfamilien erzeugen die gleiche σ -Algebra wie die ursprünglichen Variablen. Genauer, das Ereignissystem der Zylindermengen

$$\mathcal{Z} = \left\{ \bigcap_{i \in I'} X_i^{-1}(A_i) : I' \subset I \text{ endlich, } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\},$$

also die durch die endlichen Teilfamilien $(X_i)_{i \in I'}$ definierten Ereignisse, erzeugt diese σ -Algebra. Es gilt also $\sigma(\mathcal{Z}) = \sigma((X_i)_{i \in I})$.

- Das Ereignissystem der Zylindermengen $\mathcal{Z}$ ist schnittstabil.
- Das Ereignissystem aller von einem gegebenen Ereignis unabhängigen Ereignisse, also $\{C : C \in \mathcal{A}, C \perp A\}$ für eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ und ein $A \in \mathcal{A}$, ist ein Dynkin-System.
- Mit dem Dynkinschen π - λ -Satz folgt die Behauptung.

Wir definieren jetzt die elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung und beweisen mit Hilfe von Satz 3.1.1, dass sie erfüllt ist.

Satz 3.1.2 (Elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung). Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in $x \in \mathbb{R}$. Für alle $s \geq 0$ gilt dann $\sigma((B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}) \perp \mathcal{F}_s$.

Beweis. Nach Satz 3.1.1 genügt es zu zeigen, dass $(B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s) \perp (B_{u_1}, \dots, B_{u_n})$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \dots < t_m$ und $0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq s$ gilt. Dazu setzen wir $u_0 := 0$ und beobachten, dass wir, wegen $B_0 = x$ fast sicher, jede endliche Teilmenge der Vergangenheit als konstante Translation der Partialsummen der Inkremente schreiben können:

$$(B_{u_1}, \dots, B_{u_n}) = \left(x + \sum_{i=1}^k (B_{u_i} - B_{u_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, n}$$

Ebenso gilt, mit $t_0 := s$,

$$\begin{aligned} & (B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k ((B_{s+t_i} - B_s) - (B_{s+t_{i-1}} - B_s)) \right)_{k=1, \dots, m} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k (B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}) \right)_{k=1, \dots, m}. \end{aligned}$$

$(B_{u_1}, \dots, B_{u_n})$ ist also darstellbar als messbare Abbildung von Inkrementen der Vergangenheit und $(B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s)$ als messbare Abbildung von Inkrementen der Zukunft. Diese Inkremente sind offensichtlich disjunkt und somit, nach Definition der Brownschen Bewegung, unabhängig. Da Unabhängigkeit unter messbaren Abbildungen erhalten bleibt, folgt $(B_{s+t_1} - B_s, \dots, B_{s+t_m} - B_s) \perp (B_{u_1}, \dots, B_{u_n})$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 3.1.1 folgt die Behauptung. $\square$

3.2 Schwache Markoveigenschaft

Die schwache Markoveigenschaft verbindet die elementare Markoveigenschaft mit Zeithomogenität. Sie besagt, dass die Vergangenheit nicht mehr

über die Zukunft offenbart als die Gegenwart **und** dass der Prozess ab dem gegenwärtigen Zeitpunkt einem im gegenwärtigen Zustand neu gestarteten Prozess entspricht. Oder, näher an der folgenden Definition formuliert, dass die Verteilung der Zukunft unter Kenntnis der Vergangenheit mit der Verteilung des ursprünglichen Prozesses, wenn dieser im gegenwärtigen Zustand gestartet wird, übereinstimmt. Um eine möglichst intuitive Definition geben zu können, die ohne neue technische Formalismen auskommt, beschränken wir uns bei der formalen Definition auf nicht-negative reelle Zeitmengen $T \subseteq [0, \infty)$.

Definition 3.2.1 (Schwache Markoveigenschaft). Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subseteq [0, \infty)$ besitzt die schwache Markoveigenschaft, wenn für alle $s, t \geq 0$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in A) \quad \text{fast sicher.}$$

Dabei bezeichnet P^x die Verteilung des Prozesses mit deterministischem Startwert x , also $P^x(E) := P(E \mid X_0 = x)$ für jedes Ereignis E .

Ein Prozess besitzt die schwache Markoveigenschaft genau dann, wenn er *gedächtnislos und zeithomogen* ist.

Wir definieren und zeigen nun die schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung. Diese ist, genau wie die elementare Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung, eine Aussage über die Inkremente ab dem Zeitpunkt t , anstatt über die absoluten Werte.

Satz 3.2.1 (Schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung). Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Für alle $s \geq 0$ ist $(B_t^{\Delta(s)})_{t \geq 0} := (B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}$ eine von $\mathcal{F}_s$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung.

Beweis. Wir zeigen, dass $(B_t^{\Delta(s)})_{t \geq 0}$ die Axiome der Brownschen Bewegung erfüllt.

1. Deterministischer Startpunkt: Offensichtlich gilt $B_0^{\Delta(s)} = B_s - B_s = 0$.
2. Unabhängige Inkremente: Wir können jedes Inkrement von $B^{\Delta(s)}$ schreiben als Inkrement von B :

$$B_{t+h}^{\Delta(s)} - B_t^{\Delta(s)} = (B_{s+t+h} - B_s) - (B_{s+t} - B_s) = B_{s+t+h} - B_{s+t}$$

Da B eine Brownsche Bewegung ist, sind die Inkremente unabhängig.

3. Stationäre und normalverteilte Inkremente: Auch dies folgt direkt aus der Darstellung der Inkremente als Inkremente von B .
4. Stetige Pfade: Die Stetigkeit von $t \mapsto B_t^{\Delta(s)} = B_{s+t} - B_s$ folgt direkt aus der Stetigkeit von $t \mapsto B_t$.

$B^{\Delta(s)}$ ist also eine Brownsche Bewegung mit Start in 0, also eine Standard Brownsche Bewegung. Mit der elementaren Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung (Satz 3.1.2) folgt die Behauptung. $\square$

3.3 Beispiele

Offensichtlich impliziert die schwache Markoveigenschaft (der Brownschen Bewegung) die elementare Markoveigenschaft (der Brownschen Bewegung). Außerdem haben wir zu Beginn dieses Kapitels heuristisch begründet, warum die elementare und schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung auch die entsprechenden “klassischen” Markoveigenschaften implizieren.

Um das Zusammenspiel der vier betrachteten Eigenschaften weiter zu verdeutlichen, betrachten wir nun beispielhaft zwei stochastische Prozesse, die jeweils einige, aber nicht alle dieser Eigenschaften erfüllen. Dazu genügen kleine Modifikationen der Brownschen Bewegung. Die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigt beispielhafte Pfade der resultierenden Prozesse.

1. Brownsche Bewegung mit zeitabhängigem Drift

Heuristisch handelt es sich hierbei um eine Brownsche Bewegung, auf die zusätzlich eine von der Zeit abhängige Kraft einwirkt. Im Fall von Abbildung 3.1 liegt diese Kraft im Startpunkt bei 0 und wächst anschließend linear. Dieser Prozess erfüllt die elementare Markoveigenschaft (der Brownschen Bewegung), denn die Inkremente hängen nur von der Zeit, nicht aber vom aktuellen Zustand oder der vergangenen Entwicklung ab. Allerdings ist er offensichtlich nicht zeithomogen und erfüllt somit nicht die schwache Markoveigenschaft.

Allgemein können wir diese Art von Prozess darstellen durch

$$X_t = B_t + \int_0^t b(s) ds$$

mit einer deterministischen Funktion b . Im Prozess, der die Pfade aus Abbildung 3.1 erzeugt, ist b die Identitätsfunktion. Nur für konstantes b erfüllt die Brownsche Bewegung mit zeitabhängigem Drift auch die schwache Markoveigenschaft (der Brownschen Bewegung).

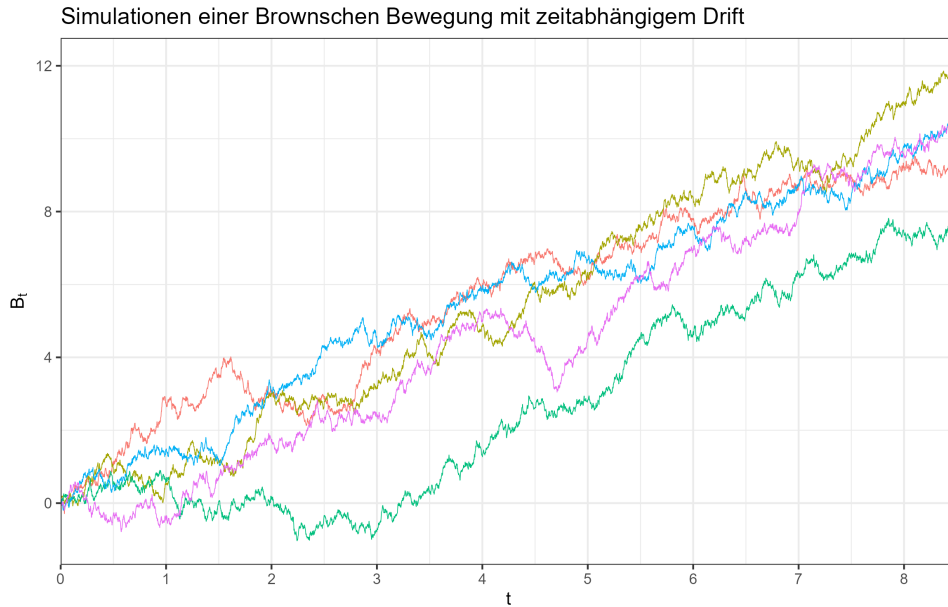


Abbildung 3.1: Simulationen einer Brownschen Bewegung mit zeitabhängigem Drift. Die Inkremente sind unabhängig, aber nicht stationär, sodass die schwache Markoveigenschaft nicht erfüllt ist.

2. Brownsche Bewegung mit ortsabhängigem Drift

Hierbei handelt es sich um eine Brownsche Bewegung, auf die zusätzlich eine vom aktuellen Zustand abhängige Kraft einwirkt. Im Fall von Abbildung 3.2 ist diese Kraft proportional zum Wert X_t . Man kann sich diesen Prozess so vorstellen, dass sich im gleichen Abstand oberhalb und unterhalb von der x-Achse zwei gleichstarke Magneten befinden, die die Bewegung anziehen". Dieser Prozess ist gedächtnislos und zeithomogen, erfüllt also die klassische schwache Markoveigenschaft. Die Inkremente sind allerdings abhängig vom aktuellen Zustand und erfüllen somit nicht die elementare Markoveigenschaft. Allgemein können wir eine Brownsche Bewegung mit ortsabhängigem Drift darstellen als

$$X_t = B_t + \int_0^t b(X_s) ds$$

mit einer deterministischen Funktion b . Im Prozess aus Abbildung 3.2 ist b definiert als $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0.2x$.

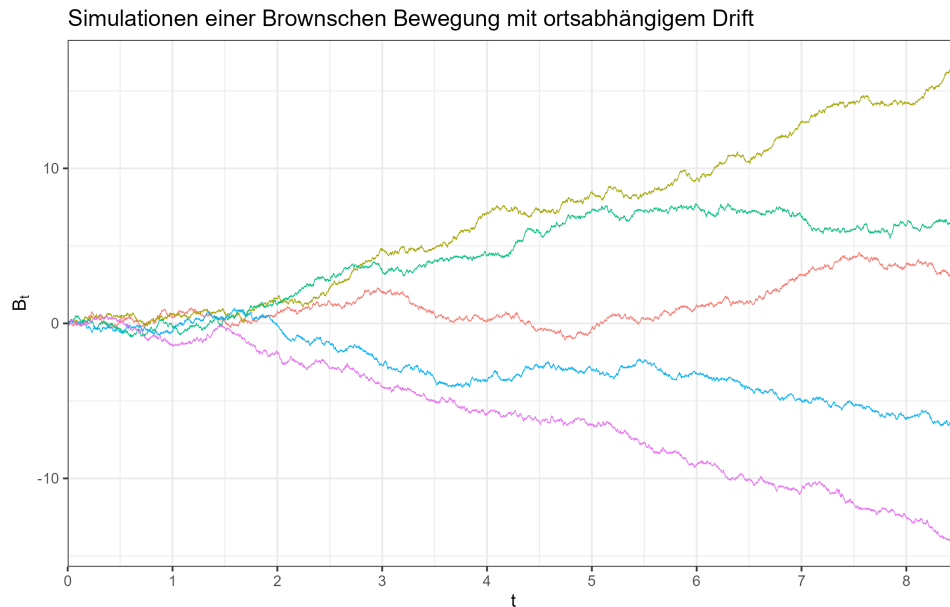


Abbildung 3.2: Simulationen einer Brownschen Bewegung mit ortsabhängigem Drift. Je weiter der Pfad von 0 abweicht, desto stärker wirkt die Kraft, die ihn weiter von 0 wegtreibt. Die klassische schwache Markoveigenschaft ist erfüllt, die elementare und schwache Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung sind verletzt, da die Inkremente vom aktuellen Zustand abhängen.

3.4 Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz

In diesem Abschnitt stellen wir mit dem Blumenthalschen 0-1-Gesetz eine Folgerung der schwachen Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung vor, die uns weitere Einsichten in die Struktur der Brownschen Bewegung ermöglicht. Genauer beschreibt das Blumenthalsche 0-1-Gesetz die Struktur der Keim- σ -Algebra. Diese σ -Algebra enthält genau die Ereignisse, die in einem beliebig kleinen Intervall nach dem Start des Prozesses stattfinden. Einige Beispiele für Keim-Ereignisse sind:

- (1) Der Prozess nimmt in einer Umgebung des Prozessstarts nur Werte an, die mindestens so groß (oder klein) sind wie sein Startwert.

- (2) Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts unendlich oft seinen Startwert an.
- (3) Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts einen bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$ an.

Das Blumenthalsche 0-1-Gesetz besagt, dass jedes Ereignis der Keim- σ -Algebra trivial ist, also Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 hat.

Um das Blumenthalsche 0-1-Gesetz zu beweisen, müssen wir eine leichte Verschärfung der elementaren Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung nachweisen. Wir verwenden dabei ohne Beweis die Tatsache, dass stochastische Unabhängigkeit unter Grenzwertbildung bezüglich fast sicherer Grenzwerte erhalten bleibt.

Lemma 3.4.1. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen mit $X_n \rightarrow X$ fast sicher. Gilt $X_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine σ -Algebra $\mathcal{A}$, dann gilt auch $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$.*

Nun benötigen wir noch eine formale Definition der Keim- σ -Algebra. Wir definieren mit der σ -Algebra $\mathcal{F}_t^+$ sogar eine Verallgemeinerung für beliebige Zeitpunkte t . $\mathcal{F}_t^+$ ist eine Erweiterung der σ -Algebra der Vergangenheit $\mathcal{F}_t$, bei der wir über die Vergangenheit hinaus auch einen “infinitesimalen Blick in die Zukunft” zulassen:

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$$

$\mathcal{F}_0^+$ ist genau die Keim- σ -Algebra.

Lemma 3.4.2. *Für alle $s \geq 0$ gilt $(B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s^+$.*

Beweis. Laut Satz 3.1.1 genügt es zu zeigen, dass $(B_{s_m+t} - B_{s_m})_{t \in T} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s^+$ für eine endliche Menge von Zeitpunkten $T \subset [0, \infty)$ gilt. Sei dazu $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $s_m \downarrow s$. Dann ist nach der schwachen Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung $(B_{s_m+t} - B_{s_m})_{t \in T}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ unabhängig von $\mathcal{F}_{s_m}$ und somit, wegen $s_m > s$, insbesondere von $\mathcal{F}_s^+ \subset \mathcal{F}_{s_m}$. Wegen der fast sicheren Stetigkeit der Brownschen Bewegung gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} (B_{s_m+t} - B_{s_m})_{t \in T} = (B_{s+t} - B_s)_{t \in T}$ fast sicher. Mit Lemma 3.4.1 folgt die Erhaltung der Unabhängigkeit unter der Grenzwertbildung und somit die Behauptung. $\square$

Mit diesem Lemma ist der Beweis des Blumenthalschen 0-1-Gesetzes trivial.

Satz 3.4.1 (Blumenthalsches 0-1-Gesetz). *Alle Ereignisse in $\mathcal{F}_0^+$ sind trivial.*

Beweis. Laut Lemma 3.4.2 ist ganz $(B_t)_{t \geq 0}$ unabhängig von $\mathcal{F}_0^+$. Insbesondere gilt das also für alle Ereignisse in $\mathcal{F}_0^+$. Sie sind also unabhängig von sich selbst und folglich trivial. $\square$

Abschließend greifen wir noch einmal die drei beispielhaften Keim-Ereignisse auf, um ihnen, ohne formale Beweise, Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen.

(1) *Der Prozess nimmt in einer Umgebung des Prozessesstarts nur Werte an, die mindestens so groß (oder klein) sind wie sein Startwert.* Dieses Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0.

(2) *Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts unendlich oft seinen Startwert an.* Da die Pfade der Brownschen Bewegung stetig sind und Ereignis (1) Wahrscheinlichkeit 0 hat, hat dieses Ereignis offensichtlich Wahrscheinlichkeit 1.

(3) *Der Prozess nimmt in jeder Umgebung des Prozessesstarts einen bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$ an.* Für $a = B_0$ beträgt die Wahrscheinlichkeit 1, für $a \neq B_0$ beträgt sie 0.

4 Starke Markoveigenschaft

Die starke Markoveigenschaft ist, wenig überraschend, eine Verstärkung der schwachen Markoveigenschaft. Während die schwache Markoveigenschaft Aussagen über das Verhalten eines stochastischen Prozesses nach einem festen, deterministischen Zeitpunkt macht, erlaubt die starke Markoveigenschaft, diesen Zeitpunkt zufällig zu wählen. Genauer gilt die Markoveigenschaft nicht nur für feste Zeiten, sondern auch für eine spezielle Klasse von Zufallszeiten, die sogenannten *Stoppzeiten*.

Anschaulich bedeutet dies, dass man den Prozess zu einem zufälligen Zeitpunkt „anhält“, der nur von der bisherigen Entwicklung abhängt, und dass der Prozess danach - gegeben den aktuellen Zustand - wieder wie ein neu gestarteter Prozess weiterläuft und von der Vergangenheit unabhängig ist.

Wir gehen analog zum vorherigen Kapitel vor: Zunächst definieren wir Stoppzeiten und die klassische starke Markoveigenschaft. Anschließend formulieren wir die starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung in Inkrementform und zeigen, dass sie erfüllt ist. Abschließend leiten wir als wichtige Anwendung das Reflexionsprinzip her.

4.1 Stoppzeiten

Um die starke Markoveigenschaft formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Stoppzeit. Bei Stoppzeiten handelt es sich um Zufallsvariablen, die den Zeitpunkt des Eintritts bestimmter Ereignisse beschreiben. Ein zentrales Beispiel ist die sogenannte *erste Treffzeit* einer (möglicherweise einelementigen) Menge A . Sie ist definiert als der Zeitpunkt, zu dem der Prozess zum ersten Mal einen Wert in A annimmt.

Allerdings ist nicht jeder zufällige Zeitpunkt eine Stoppzeit. Ein zufälliger

Zeitpunkt τ ist nur dann eine Stoppzeit, wenn wir für jeden Zeitpunkt t allein anhand der bis zu t verfügbaren Informationen, also der Vergangenheit und Gegenwart des Prozesses, entscheiden können, ob τ bereits eingetreten ist oder nicht. Für eine erste Treffzeit ist dies offensichtlich der Fall. Interessiert uns hingegen der Zeitpunkt, zu dem der Prozess auf einem gegebenen Zeitintervall $[a, b]$ sein Maximum oder Minimum annimmt, so kann zu einem gegebenen festen $t \in [a, b]$ im Allgemeinen nicht entschieden werden, ob das Maximum oder Minimum bereits erreicht wurde, da wir nicht wissen, ob in $(t, b]$ ein noch größerer oder kleinerer Wert angenommen wird.

Bevor wir weitere Beispiele und Gegenbeispiele diskutieren, wollen wir Stoppzeiten formal definieren.

Definition 4.1.1 (Stoppzeit). Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Stoppzeit* bezüglich $(\mathcal{F}_t)$, wenn für alle $t \geq 0$ gilt

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkung. Allgemeine Filtrationen werden in dieser Arbeit nicht besprochen. Die Notation $\mathcal{F}_t$ sollte dem aufmerksamen Leser aber bekannt erscheinen, denn wir haben dieselbe Notation für die σ -Algebren der Vergangenheit genutzt. Dies ist kein Zufall, da es sich bei diesen um den wohl wichtigsten Spezialfall einer Filtration handelt. Die Familie der σ -Algebren der Vergangenheit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ wird deshalb auch als die *natürliche Filtration* bezeichnet.

Wir betrachten nun einige Beispiele.

1. Jeder deterministische Zeitpunkt t ist eine Stoppzeit.
2. Die erste Treffzeit einer Menge ist eine Stoppzeit.
3. Die letzte Treffzeit einer Menge ist im Allgemeinen keine Stoppzeit, da zum Zeitpunkt t nicht entschieden werden kann, ob die Menge im weiteren Verlauf des Prozesses noch einmal getroffen wird.
4. Der Zeitpunkt der Annahme des Maximums oder Minimums auf einem Intervall ist im Allgemeinen keine Stoppzeit.

Wir kommen nun zum wichtigen Beispiel der diskreten Approximation einer Stoppzeit τ durch Vielfache von $(1/2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Abbildung 4.1 zeigt

diese Approximation von oben und unten für $n = 0, 1, \dots, 10$ für die erste Treffzeit von $\{-2, 2\}$.

5. Wir können jede Stoppzeit τ diskret von oben approximieren durch

$$\tau_n^+ := \min_{k \in \mathbb{N}_0} \{k/2^n : k/2^n \geq \tau\} .$$

Dann ist τ_n ebenfalls eine Stoppzeit.

6. Die diskrete Approximation einer Stoppzeit τ von unten

$$\tau_n^- := \max_{k \in \mathbb{N}_0} \{k/2^n : k/2^n \leq \tau\} .$$

ist im Allgemeinen keine Stoppzeit.

Die Approximation von oben werden wir im Beweis der starken Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung nutzen.

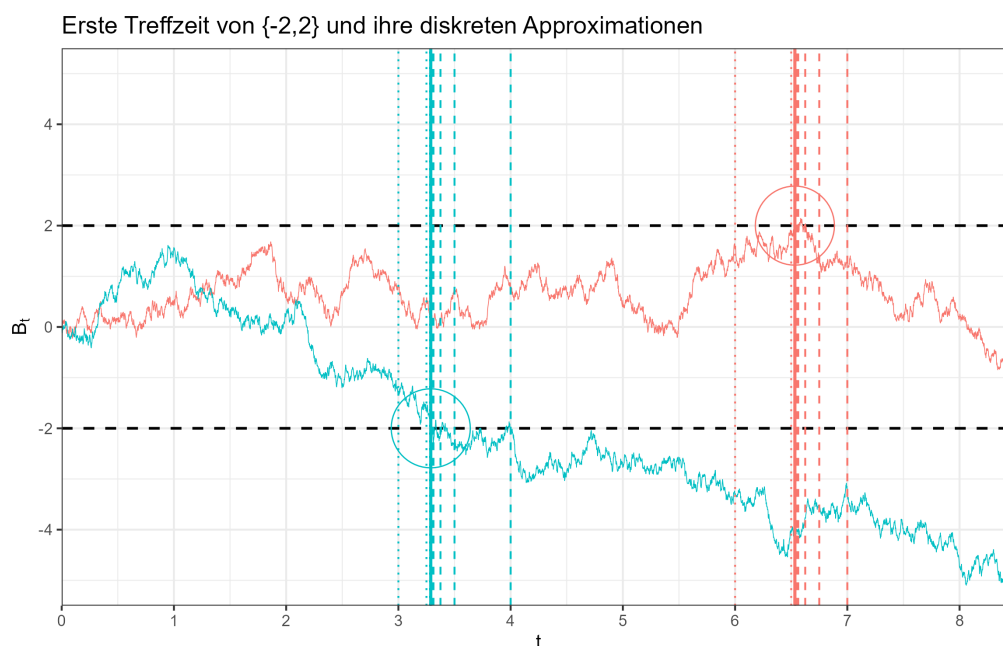


Abbildung 4.1: Erste Treffzeit der Mengen $\{-2, 2\}$ und ihre diskreten Approximationen von oben und unten. Die gestrichelten vertikalen Linien markieren die Approximationen durch Vielfache von 2^{-n} für $n = 0, \dots, 10$. Bei der Approximation von unten handelt es sich **nicht** um eine Stoppzeit.

4.2 Starke Markoveigenschaft

Die starke Markoveigenschaft dehnt die schwache Markoveigenschaft von festen Zeitpunkten auf Stoppzeiten aus. Insofern ist sie eine Verallgemeinerung, beziehungsweise als Forderung eine Verschärfung der schwachen Markoveigenschaft. Genauer fordert sie, dass der Prozess sich nicht nur nach jedem festen Zeitpunkt s wie ein im Zustand X_s neu gestarteter Prozess verhält, sondern auch nach jeder Stoppzeit τ . Für die formale Definition benötigen wir die von τ induzierte σ -Algebra

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}$$

Nun können wir die Definition für die starke Markoveigenschaft fast direkt von der Definition der schwachen Markovbedingung übernehmen.

Definition 4.2.1 (Starke Markoveigenschaft). Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subseteq [0, \infty)$ besitzt die starke Markoveigenschaft, wenn für alle $t \geq 0$, alle Stoppzeiten τ bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_{\tau+t} \in A \mid \mathcal{F}_\tau) = P^{X_\tau}(X_t \in A) \quad \text{fast sicher.}$$

Wir kommen nun zur starken Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung. Auch diese ist eine direkte Übertragung der schwachen Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung auf beliebige Stoppzeiten τ .

Satz 4.2.1 (Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung). *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Für alle Stoppzeiten τ bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ ist $(B_t^{\Delta(\tau)})_{t \geq 0} := (B_{\tau+t} - B_\tau)_{t \geq 0}$ eine von $\mathcal{F}_\tau$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung.*

Beweis. Wir folgern zunächst aus der Schwachen Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung, dass die Behauptung für die Stoppzeiten $\tau_n = \tau_n^+$, die τ diskret von oben approximieren, gilt. Anschließend zeigen wir, dass wegen $\tau_n \downarrow \tau$ die Behauptung für τ folgt.

Es bezeichne

- (1) $B_t^{\Delta(k/2^n)} = B_{k/2^n+t} - B_{k/2^n}$ die Inkremente zu $k/2^n$,
- (2) $B_t^{\Delta(\tau_n)} = B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n}$ die Inkremente zu τ_n ,

(3) $B_t^{\Delta(\tau)} = B_{\tau+t} - B_\tau$ die Inkremente zu τ ,

und $B^{\Delta(\cdot)} := (B_t^{\Delta(\cdot)})_{t \geq 0}$ die entsprechenden Prozesse. Wir zeigen nun Schrittweise für die Prozesse (1), (2) und (3), dass $B^{\Delta(\cdot)}$ eine von F unabhängige Brownsche Bewegung ist.

(1) Dies ist genau die Schwache Markov Bedingung.

(2) Sei $E \in F_{\tau_n}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& P\left(B^{\Delta(\tau_n)} \in A, E\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(B^{\Delta(k/2^n)} \in A, \tau_n = k/2^n, E\right) \quad \left| \begin{array}{l} \tau_n(\Omega) \subseteq \{k/2^n : k \in \mathbb{N}_0\} \\ \text{ist abzählbar} \end{array} \right. \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(B^{\Delta(k/2^n)} \in A\right) \cdot P\left(\tau_n = k/2^n, E\right) \quad \left| \begin{array}{l} B^{\Delta(k/2^n)} \perp\!\!\!\perp F_{k/2^n} \text{ und} \\ (\tau_n = k/2^n \cap E) \in F_{k/2^n} \end{array} \right. \\
&= P(B \in A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau_n = k/2^n, E) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Inkremente von } B \\ \text{sind stationär} \end{array} \right. \\
&= P(B \in A) \cdot P(E) \quad \left| \tau_n(\Omega) = \{k/2^n : k \in \mathbb{N}_0\} \right.
\end{aligned}$$

Folglich ist $B^{\Delta(\tau_n)}$ unabhängig von F_{τ_n} und verteilungsgleich mit B , also eine Brownsche Bewegung.

(3) Aus $\tau_n \downarrow \tau$ fast sicher und der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung folgt $B^{\Delta(\tau)} = \lim_{n \rightarrow \infty} B^{\Delta(\tau_n)}$ fast sicher. Da alle $B^{\Delta(\tau_n)}$ Brownsche Bewegungen mit Start in 0 sind, ist auch $B^{\Delta(\tau)}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0. Ferner gilt $B^{\Delta(\tau_n)} \perp\!\!\!\perp F_\tau \subseteq F_{\tau_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Lemma 3.4.1 bleibt diese Unabhängigkeit unter der Grenzwertbildung erhalten und es folgt $B^{\Delta(\tau)} \perp\!\!\!\perp F_\tau$. $\square$

4.3 Reflexionsprinzip

Abschließend stellen wir mit dem Reflexionsprinzip eine wichtige Folgerung der starken Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung vor. Das

Reflexionsprinzip besagt, dass man eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ an einer Stoppzeit τ spiegeln kann, ohne ihre Verteilung zu verändern. Der so konstruierte Prozess $(B_t^*)_{t \geq 0}$ ist also wieder eine Brownsche Bewegung mit demselben Startpunkt wie $(B_t)_{t \geq 0}$.

Abbildung 4.2 zeigt den Unterschied zwischen B und B^* beispielhaft an zwei konkreten Pfaden. Als Stoppzeit τ wurde hierbei wieder die erste Treffzeit von $\{-2, 2\}$ gewählt. Der Prozess B^* stimmt also bis zur Stoppzeit τ mit B überein und wird ab τ an der Höhe B_τ gespiegelt.

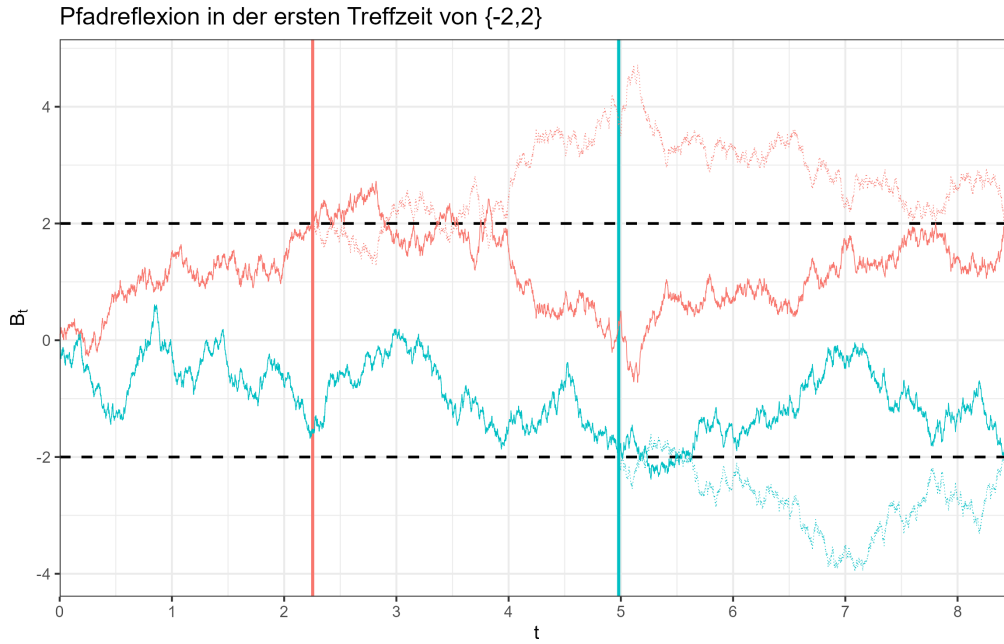


Abbildung 4.2: Pfadreflexion einer Brownschen Bewegung an der ersten Treffzeit der Menge $\{-2, 2\}$. Der durchgezogene Pfad ist der Originalprozess, der gepunktete Pfad der an der Stoppzeit gespiegelte Prozess.

Allgemein können wir den gespiegelten Prozess definieren durch

$$B_t^* := B_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + (2B_\tau - B_t) \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}.$$

Damit können wir das Reflexionsprinzip formulieren.

Satz 4.3.1 (Reflexionsprinzip). *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}$ und τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration. Dann ist der durch*

$$B_t^* := B_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + (2B_\tau - B_t) \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}$$

definierte Prozess $(B_t^*)_{t \geq 0}$ wieder eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt x .

Beweis. Wir beobachten, dass wir $(B)_{t \geq 0}$ und $(B^*)_{t \geq 0}$ für alle $t \geq 0$ auch darstellen können durch

$$B_t = B_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + (B_\tau + (B_t - B_\tau)) \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}, \quad (4.1)$$

$$B_t^* = B_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + (B_\tau - (B_t - B_\tau)) \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}. \quad (4.2)$$

$(B_t - B_\tau)_{t \geq 0}$ ist nach der starken Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung eine von $\mathcal{F}_\tau$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung. Wegen der Messbarkeit der Abbildung $x \mapsto -x$ ist $-(B_t - B_\tau)_{t \geq 0}$ ebenfalls unabhängig von $\mathcal{F}_\tau$ und wegen der Symmetrie der Standard Brownschen Bewegung ebenfalls eine Standard Brownsche Bewegung.

In den Darstellungen (4.1) und (4.2) werden also dieselben $\mathcal{F}_\tau$ -messbaren Größen mit zwei identisch verteilten und von ihnen unabhängigen Inkrementprozessen kombiniert. Folglich sind die Prozesse $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(B_t^*)_{t \geq 0}$ identisch verteilt. Insbesondere ist $(B_t^*)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt x .

□

Das Reflexionsprinzip ist von zentraler Bedeutung in der Theorie der Brownschen Bewegung, da sich aus ihm zahlreiche wichtige Resultate ableiten lassen. Es ermöglicht insbesondere die Untersuchung von Extremwerten, etwa der Verteilung des Maximums auf einem Zeitintervall, und Treffwahrscheinlichkeiten, wie der Wahrscheinlichkeit, vor einem gegebenen Zeitpunkt ein bestimmtes Niveau zu überschreiten. Die Resultate dieser Arbeit lassen sich darüber hinaus ohne großen Mehraufwand auf die mehrdimensionale Brownsche Bewegung übertragen, bei deren struktureller Untersuchung das Reflexionsprinzip erneut eine zentrale Rolle spielt.

Literatur

- [1] P. Mörters und Y. Peres, *Brownian Motion* (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics). Cambridge University Press, 2010.